QUESTION 1 *(10 points)*

Dans un oscillateur forcé, calculer la valeur de l'amortissement relatif (η) si la phase φ est 45 degrés pour la fréquence d'excitation à laquelle nous trouvons un facteur d'amplification dynamique maximal (μ_{max}).

Solution

On utilise le résultat bien connu de la théorie nous disant que, dans le cas harmonique permanent, on trouve le maximum du μ pour $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1-2\eta^2}$ si $\eta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\tan(\varphi) = 1 = -\frac{2\eta\beta_2}{1-\beta_2^2} = -\frac{2\eta\sqrt{1-2\eta^2}}{1-(1-2\eta^2)} = -\frac{\sqrt{1-2\eta^2}}{\eta} \to \eta^2 = 1-2\eta^2 \to \eta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Comme la valeur de η que l'on a trouvée satisfait $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ça nous confirme le choix pour β_2.

QUESTION 2 *(20 points)*

Considérer les 4 systèmes (a,b,c,d) de la Figure 2.1. **Pour chacun des paramètres listés ci-dessous, classer les 4 systèmes dans l'ordre croissant (de la plus petite valeur à la plus grande) :**

- **i) La pulsation propre du système (ω_0)**
- **ii) L'amortissement relatif (η)**
- **iii) Le quasi-période dans le cas libre, en considérant que, dans tous les cas, $\eta \ll 1$**
- **iv) La fréquence à laquelle l'on trouve l'accélération maximale.**

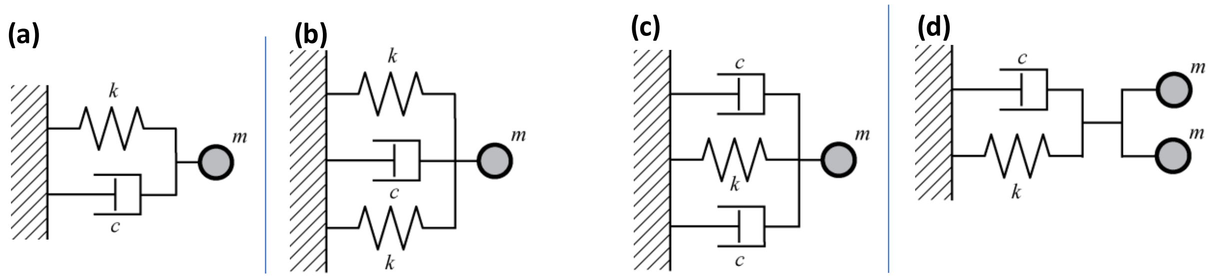

Figure 2.1 | Schémas pour les 4 systèmes

Solution

(i)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)_d < \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)_a = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)_c < \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)_b \rightarrow (\omega_0)_d < (\omega_0)_a = (\omega_0)_c < (\omega_0)_b$$

(ii)

$$\eta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_0} \Rightarrow \left(\frac{c}{2\sqrt{2mk}}\right)_d = \left(\frac{c}{2\sqrt{2mk}}\right)_b < \left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)_a < \left(\frac{c}{\sqrt{mk}}\right)_c \rightarrow \eta_d = \eta_b < \eta_a < \eta_c$$

(iii) On met en relation le quasi-période avec la pulsation propre, qui a été triée lors de la partie (i). Comme $\eta \ll 1$, ce tri restera valide mais on doit vérifier les cas où les pulsations propres sont égales.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\eta^2} \Rightarrow (\omega_1)_d < (\omega_1)_{a,c} < (\omega_1)_b \Rightarrow$$

$$(\omega_1)_d < \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{mk}}\right)_c < \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{c^2}{4mk}}\right)_a < (\omega_1)_b \rightarrow (\omega_1)_d < (\omega_1)_c < (\omega_1)_a < (\omega_1)_b$$

$$\Rightarrow (T_1)_b < (T_1)_a < (T_1)_c < (T_1)_d$$

(iv)

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2\eta^2}} \Rightarrow (\omega_2)_d < (\omega_2)_{a,c} < (\omega_2)_b \rightarrow (\omega_2)_d < \left(\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{2mk}}}\right)_a < \left(\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{1-\frac{2c^2}{mk}}}\right)_c < (\omega_2)_b$$

$$\Rightarrow (\omega_2)_d < (\omega_2)_a < (\omega_2)_c < (\omega_2)_b$$

QUESTION 3 *(30 points)*

Sur un oscillateur élémentaire, avec raideur k, masse m et coefficient d'amortissement c, on applique une force périodique comme montrée à la Figure 3.1, ayant la formule :

$$f(t) = 2\sin(2\omega t)\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\cos(5\omega t)$$

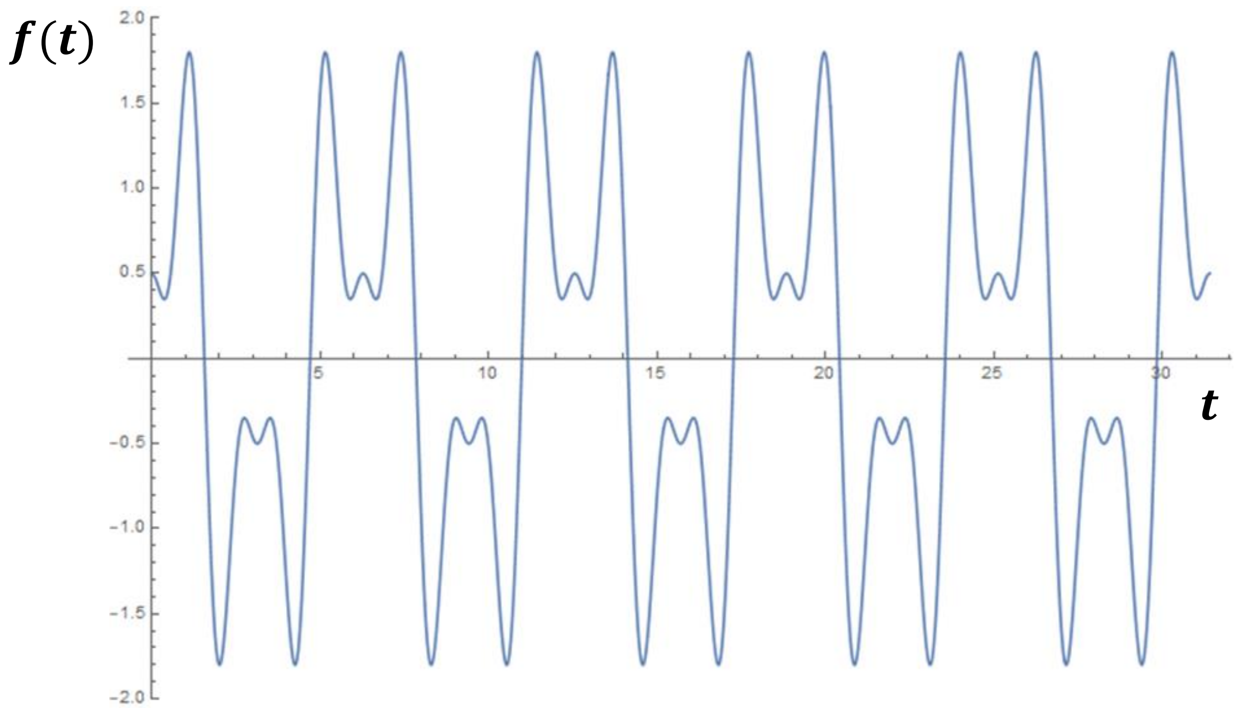

Figure 3.1 | Force périodique appliqué au système

i) Décomposer la force $f(t)$ selon ses harmoniques, en calculant F_n et ψ_n. .... (5 pts)

ii) Calculer les harmoniques du déplacement, avec X_n et φ_n, en fonction des paramètres du système. .... (10 pts)

iii) Si $\omega = \frac{\omega_0}{5}$, pour quelle plage de valeurs de η est-ce que l'amplitude du cinquième harmonique (terme à la fréquence $5\omega t$) est plus large que toutes les autres harmoniques ? .... (15 pts)

iv) Calculer la fréquence d'excitation ω telle que les amplitudes du premier et troisième harmoniques soient égales. .... (5 pts)

v) Calculer la fréquence d'excitation ω telle que la vitesse du troisième harmonique soit 6/5 de celle du cinquième harmonique. .... (10 pts)

Formulas d'aide :

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} \qquad \sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2} \qquad \cos(A)\sin(B) = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$$

Solution

(i) On utilise les formules d'aide pour décomposer la force périodique en :

$$f(t) = \cos(\omega t) - \cos(3\omega t) + \frac{1}{2}\cos(5\omega t)$$

Dans cette forme, on peut voir directement que la fonction est écrite comme une somme de cosinus avec des fréquences multiples de ω. Ainsi, la décomposition en série de Fourier est déjà faite automatiquement et on obtient :

$$F_1 = F_3 = 1; F_5 = \frac{1}{2}$$
$$\psi_1 = \psi_5 = 0; \psi_3 = \pi$$

(ii) Pour maintenant calculer les harmoniques du déplacement, on utilise les formules développées dans le cours, mais en faisant la substitution des paramètres calculés dans la partie précédente :

$X_1 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\eta\beta)^2}}$	$\tan(\varphi_1) = \frac{2\eta\beta}{1-\beta^2}$
$X_3 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2}}$	$\tan(\varphi_3) = \frac{6\eta\beta}{1-9\beta^2}$
$X_5 = \frac{1}{2k}\frac{1}{\sqrt{(1-25\beta^2)^2 + (10\eta\beta)^2}}$	$\tan(\varphi_5) = \frac{10\eta\beta}{1-25\beta^2}$

(iii)

On sait que maintenant la fréquence de la force est $\omega = \frac{\omega_0}{5} \to \beta = 0.2$:

$X_1 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(24/25)^2 + (2\eta/5)^2}}$
$X_3 = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(16/25)^2 + (6\eta/5)^2}}$
$X_5 = \frac{1}{k}\frac{1}{4\eta}$

On doit comparer les différents harmoniques du déplacement pour savoir quand le 5ème est plus grand que les autres :

$$X_5 > X_1 \to \frac{1}{k}\frac{1}{4\eta} > \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{2\eta}{5}\right)^2}} \to \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{2\eta}{5}\right)^2 > 16\eta^2 \to \eta < \sqrt{\frac{24^2}{25^2\left(16 - \frac{4}{25}\right)}} = 0.241$$

$$X_5 > X_3 \to \frac{1}{k}\frac{1}{4\eta} > \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{6\eta}{5}\right)^2}} \to \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{6\eta}{5}\right)^2 > 16\eta^2 \to \eta < \sqrt{\frac{16^2}{25^2\left(16 - \frac{36}{25}\right)}} = 0.167$$

(iv) Il est demandé de calculer ω, ou bien β, lorsque le premier et troisième harmonique ont la même intensité :

$$X_1 = X_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\eta\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2 = (1-\beta^2)^2 + (2\eta\beta)^2$$

$$\rightarrow 1 - 18\beta^2 + 81\beta^4 + 36\eta^2\beta^2 = 1 - 2\beta^2 + \beta^4 + 4\eta^2\beta^2$$

$$\rightarrow 80\beta^4 + 32\eta^2\beta^2 - 16\beta^2 = 0$$

Solution triviale : $\beta = 0$

Deuxième solution :

$$80\beta^2 + 32\eta^2 - 16 = 0 \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{1-2\eta^2}{5}}$$

(v) Comme pour la partie précédente mais avec les vitesses du 3ème et 5ème. On commence par calculer les intensités des harmoniques en vitesse. Pour cela on revient avec la formule complète des harmoniques et on utilise comme arguments des cosinus $(n\omega t)$:

$$V_3 = \frac{\omega}{k}\frac{3}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2}}; \qquad V_5 = \frac{\omega}{2k}\frac{5}{\sqrt{(1-25\beta^2)^2 + (10\eta\beta)^2}}$$

Maintenant il est demandé de trouver la fréquence pour laquelle $V_3 = \frac{6}{5}V_5$:

$$\frac{3\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2}} = \frac{6}{5}\frac{5\omega}{2k}\frac{1}{\sqrt{(1-25\beta^2)^2 + (10\eta\beta)^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-9\beta^2)^2 + (6\eta\beta)^2 = (1-25\beta^2)^2 + (10\eta\beta)^2$$

$$\rightarrow 1 - 18\beta^2 + 81\beta^4 + 36\eta^2\beta^2 = 1 - 50\beta^2 + 625\beta^4 + 100\eta^2\beta^2$$

$$\rightarrow 556\beta^4 - 32\beta^2 + 64\eta^2\beta^2 = 0$$

Solution triviale : $\beta = 0$

Deuxième solution :

$$556\beta^2 - 32 + 64\eta^2 = 0 \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{8}{139}(1-2\eta^2)}$$

QUESTION 4 *(40 points)*

Le système de la Figure 4.1 se compose d'un ressort de constante k, d'un amortisseur de coefficient c, ainsi que d'une barre de masse m et longueur L avec une rigidité infinie. On suppose que les angles de rotation θ sont toujours petits.

i) **Dessiner le diagramme des forces, en marquant clairement la direction et le sens des axes et des angles. .... (2 pts)**

ii) **Déterminer l'angle de rotation θ_0 à la position d'équilibre. .... (3pts)**

iii) **Déterminer la pulsation propre (ω_0) et l'amortissement relatif (η). .... (15 pts)**

iv) **Trouver le ratio entre les coefficients c^2et km tel que la quasi-période du système soit $T_1 = \frac{T_0}{0.8}$. .... (10 pts)**

v) **Si l'on suppose qu'une masse additionnelle M est placée sur la barre, en son centre, soit à une distance égale du ressort et de l'amortisseur, réécrire l'équation du mouvement et calculer la nouvelle pulsation propre du système. .... (10 pts)**

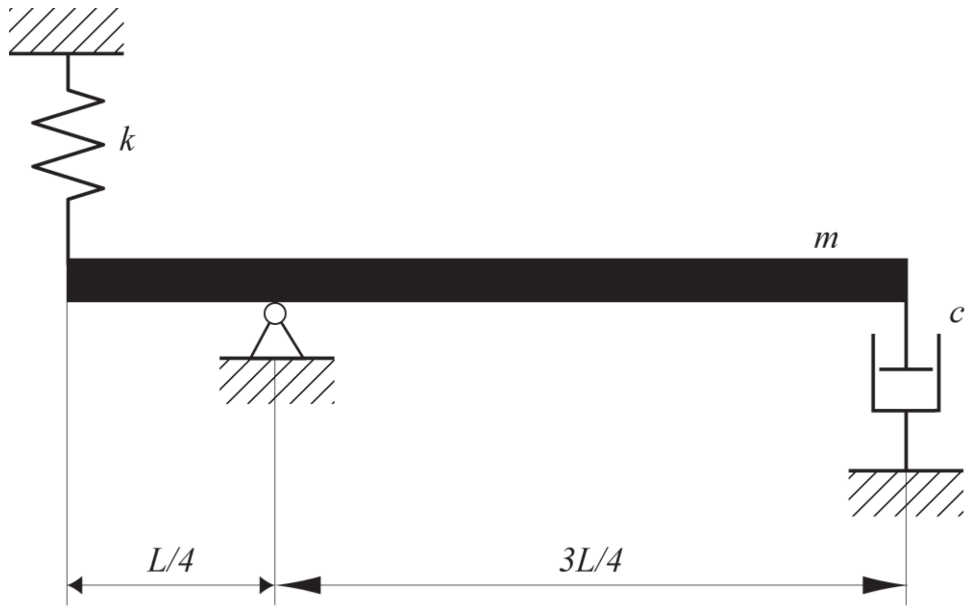

Figure 4.1 | Schéma du système, avec la barre de rigidité infinie, le ressort et l'amortisseur.

Solution

(i) Je ne le mets pas ici. Le plus important du diagramme était de définir le sens positif pour l'angle θ, qui dans notre cas est défini positif vers le bas.

(ii) Si l'on applique l'équilibre des moments :

$$\sum M_o = 0 \rightarrow -k\left(\frac{L}{4}\theta_0\right)\frac{L}{4} + \frac{mgL}{4} = 0$$

$$\theta_0 = 4\frac{mg}{kL}$$

Ici, le poids est appliqué au centre de la masse, et on utilise l'approximation des petits angles.

(iii)

Pour calculer la pulsation propre et l'amortissement relatif, il faut écrire l'équation du mouvement en dynamique :

$$\sum M_o = I\ddot{\theta} \rightarrow -k\left(\frac{L}{4}\theta\right)\frac{L}{4} - c\dot{\theta}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + \frac{mgL}{4} = I\ddot{\theta}$$

Où le moment d'inertie I est calculé par :

$$I = \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{27L^3}{64} + \frac{L^3}{64}\right) = \frac{7mL^2}{48}$$

On introduit une nouvelle variable :

$$\theta = \theta' + \theta_0; \qquad \dot{\theta}' = \dot{\theta}; \qquad \ddot{\theta}' = \ddot{\theta}$$

Et alors on a :

$$I\ddot{\theta}' + c\dot{\theta}'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + k\left(\frac{L}{4}\right)^2\theta' = 0$$

Et on peut identifier :

$$m_{eq} = I = \frac{7mL^2}{48}; c_{eq} = \frac{9}{16}L^2 c; \;\; k_{eq} = \frac{L^2}{16}k$$

Alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{3}{7}\frac{k}{m}}; \qquad \eta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_0} = \sqrt{\frac{243}{28}\frac{c^2}{km}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\sqrt{\frac{c^2}{km}}$$

(iv) Si $T_1 = \frac{T_0}{0.8} \rightarrow \omega_1 = \omega_0 \cdot 0.8 \rightarrow \sqrt{1-\eta^2} = 0.8 \rightarrow \eta = 0.6$

$$\sqrt{\frac{243}{28}\frac{c^2}{km}} = 0.6 \rightarrow \frac{243}{28}\frac{c^2}{km} = 0.36 \rightarrow \frac{c^2}{km} = \frac{112}{2700} = 0.04148$$

(v)

Ici il y a deux choses qui changent : la position d'équilibre et le moment d'inertie.
Si l'on calcule le nouveau moment d'inertie :

$$I_{nouveau} = I_{Masse} + I_{barre} = \frac{7mL^2}{48} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7mL^2}{48} + M\frac{L^2}{16}$$

L'équation du mouvement change uniquement à cause du moment d'inertie :

$$I_{nouveau}\ddot{\theta}' + c\dot{\theta}'\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + k\left(\frac{L}{4}\right)^2\theta' = 0$$

Et en conséquence :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kL^2}{16}/I_{nouveau}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{7m}{3} + M}}$$